$textrm{GL}_{2}$上のASAI表現に付随するEPSILON因子について (保型形式の解析的・数論的研究)

石川, 勲

数理解析研究所講究録 第2100巻 2019年 94-108

GL_2 上の ASAI 表現に付随する EPSILON 因子について

石川 勲
理化学研究所/慶應義塾大学
ISAO ISHIKAWA
RIKEN/KEIO UNIVERSEITY

ABSTRACT. 非アルキメデス的局所体の 2 次拡大 E/F と $\mathrm{GL}_2(E)$ の generic な既約許容表現に対しては *Asai* 表現と呼ばれる表現が定まる. Asai 表現に対して L 関数, 及び, epsilon 因子と呼ばれる不変量が定義できるが, この不変量には複数の異なる定義が存在する. それらの定義は全く異なる文脈でなされるため, それらの比較は重要な問題である. 今回, 筆者は定義の異なる epsilon 因子ら同士の明示的な関係式を与えた (Theorem 4.1) ので, その結果について概説したい.

1. GL_2 における非アルキメデス的局所体上の局所 LANGLANDS 対応

本章では F を非アルキメデス的局所体とし, $\mathcal{O}_F$ を F の整数環, 素元 $\varpi_F \in \mathcal{O}_F$ を一つ固定する. また, $k := \mathcal{O}_F/\varpi_F\mathcal{O}_F$ を剰余体として, $q := \#k$ とする. F の絶対値 (乗法的付値) $|\cdot|_F : F \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ を $|\varpi_F|_F = q^{-1}$ を満たすものとして定義する. 任意の体 L に対して, G_L を L に付随する絶対 Galois 群とする.

1.1. **Weil-Deligne 表現.** W_F を F に付随する Weil 群とする. Weil 群のより一般的な (F が大域体やアルキメデス的局所体の場合も含めた) 定義は [Tat79, Section 1] を参照のこと. 本稿では F が非アルキメデス的局所体であるので, Weil 群は G_F の稠密な局所コンパクト部分群として明示的に以下のように定義される: G_F の作用は $\mathcal{O}_F$, 及び, $\varpi_F\mathcal{O}_F$ を保ち, 従って, その作用は自然に k に誘導される. すなわち, 自然な射 $\varphi : G_F \to G_k$ が存在する. $I_F := \mathrm{Ker}(\varphi)$ は惰性群と呼ばれている, また φ は全射であることが知られている ([Ser79, Chapter 1, Section 7, Proposition 20]). $\mathrm{Frob}_q \in G_k$ を幾何学的 Frobenius 写像, すなわち, $\mathrm{Frob}_q(x) = x^{1/q}$ とする. この時, Weil 群 W_F は

$$W_F := \varphi^{-1}\left(\mathrm{Frob}_q^{\mathbb{Z}}\right)$$

として定義される. W_F の位相は $\mathrm{Ker}(\varphi)$ を開コンパクト部分群とする唯一の位相である. 局所類対論により同型

$$\mathrm{res}_F : F^\times \cong W_F^{\mathrm{ab}} \tag{1.1}$$

であって, $\mathrm{res}_F(\varpi_F) = \mathrm{Frob}_q$ となるものが存在する. ここで, W_F^{ab} は W_F のアーベル化である. $||\cdot||$ を合成

$$||\cdot|| : W_F \to W_F^{\mathrm{ab}} \overset{\mathrm{res}_F^{-1}}{\cong} F^\times \overset{|\cdot|_F}{\to} \mathbb{R}_{>0}$$

によって定義する.

まず, Weil-Deligne 表現を定義する.

定義 1.1 (Weil-Deligne 表現). E を標数 0 の体とする. W_F の E 上の **Weil-Deligne 表現**とは組 $\rho' = (\rho, N)$ であって以下を満たす:

(1) $\rho : W_F \to \mathrm{GL}(V)$ は連続準同型である. ここで, V は $\mathbb{C}$ 上の有限次元線型空間であり, $\mathrm{GL}(V)$ には離散位相を入れている.
(2) $N \in \mathrm{End}(V)$ は冪零元であり, $\rho(w)N\rho(w)^{-1} = ||w||N$ を満たす.

例 1.2 (特別表現). $V := \bigoplus_{i=0}^{n-1} \mathbb{Q}e_i$ を n 元から生成される自由線形空間として, $\rho(w)e_i = ||w||^{-(n-1)/2+i}e_i$, $Ne_i = e_{i+1}$ $(i = 0, \dots, n-2)$, $Ne_{n-1} = 0$ と定義すると, (ρ, N) は $\mathbb{C}$ 上の Weil-Deligne 表現となる. この表現は $\mathrm{sp}(n)$ と書かれる.

1.2. **$\mathbb{C}$ 上の Weil-Deligne 表現に付随する L 関数, 及び, epsilon 因子.** 以下, 非自明な加法的指標 $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を固定する. また, ψ の導手の指数を $c(\psi) \in \mathbb{Z}$ とする, すなわち, $c(\psi)$ は $\psi\left(\varpi_F^{c(\psi)}\mathcal{O}_F\right) = \{1\}$ となる最小の整数である.

$\rho' := (\rho, N)$ を $\mathbb{C}$ 上の Weil-Deligne 表現とし, $\mathbb{C}$ 上の有限次線型空間 V として, $\rho : W_F \to \mathrm{GL}(V)$ とする. ρ' に付随する L 関数は次のように定義される:

$$L(s, \rho') := \det\left(1 - q^{-s}\rho(\mathrm{Frob}_q)|_{(\mathrm{Ker}\,N)^{I_F}}\right)^{-1}$$

例 1.3. $\dim V = 1$ とする. $\rho' = (\chi, 0)$ とみなせる. ここで χ は連続群準同型 $\chi : W_F \to \mathbb{C}^\times$ である. ρ' に付随する L 関数 $L(s, \chi) := L(s, (\chi, 0))$ は次のようになる:

$$L(s, \chi) := \begin{cases} (1 - \chi(\mathrm{Frob}_q)q^{-s})^{-1} & (\chi \text{ は不分岐指標 i.e. } \chi(I_F) = \{1\}), \\ 1 & (\chi \text{ は分岐指標 i.e. } \chi(I_F) \neq \{1\}). \end{cases}$$

次に, ρ' に付随する epsilon 因子を定義する. まず $\dim V = 1$ の場合について述べる. $\chi := \rho$ として, $V = \mathbb{C}$, $N = 0$ とする. χ は W_F^{ab} を経由するので, 局所類対論の同型 (1.1) を介して, $F^\times$ 上の指標とも思える. すなわち, $x \in F^\times$ に対して, $\chi(x) := \chi(\mathrm{res}_F(x))$ と定義する. 整数 $c(\chi)$ を χ の導手, すなわち, $\chi(\mathcal{O}_F^\times) = \{1\}$ の時は 0, そうでない時は $\chi(1 + \varpi_F^c(\chi)\mathcal{O}_F) = \{1\}$ を満たす最小の整数として定義する. χ に付随する epsilon 因子 $\varepsilon(s, \chi, \psi)$ は次のように定義される:

$$\varepsilon(s, \chi, \psi) := \begin{cases} \chi(\varpi_F)^{-c(\psi)}q^{c(\psi)(s-1/2)} & (\chi \text{ が不分岐指標}), \\ \displaystyle\int_{\varpi^l\mathcal{O}_F^\times} |x|^{-s}\chi^{-1}\psi(x)dx & (\chi \text{ が分岐指標}, l := c(\psi) - c(\chi)). \end{cases}$$

ここで, dx は F 上の自己双対な Haar 測度 (i.e. $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, dx) = q^{c(\psi)/2}$) である.

epsilon 因子はある関数等式に自然に現れる対象である: $F^\times$ 上の積分を

$$Z(s, \chi, \Phi) := \int_{F^\times} \Phi(x)|x|_F^s\chi(x)\, d^\times x$$

と定義する. ここで, Φ は F 上の Bruhat-Schwartz 関数 (i.e. 局所定数コンパクト台関数) であり, $d^\times x := |x|_F^{-1}dx$ である. $Z(s, \chi, \Phi)$ は $\mathbb{C}$ 上に有理型に解析接続され, 次の関数等式を満たす:

$$\frac{Z(1-s, \chi^{-1}, \widehat{\Phi})}{L(1-s, \chi^{-1})} = \varepsilon(s, \chi, \psi)\frac{Z(s, \chi, \Phi)}{L(s, \chi)}. \tag{1.2}$$

ここで, $\widehat{\Phi}(x) := \int_F \Phi(y)\psi(yx)\, dy$ である.

$\dim V$ の場合の epsilon 因子について述べる. まず次の定理を紹介する:

定理 1.4. V を $\mathbb{C}$ 上の有限次元部分空間として, $\rho : W_F \to \mathrm{GL}(V)$ を連続準同型とする. この時, ある, $\mathbb{C}$ 上の解析関数 $\varepsilon(s, \rho, \psi)$ が唯一存在して次の 3 つの性質を満たす

(1) $\dim(V) = 1$, $\rho = \chi : W_F \to \mathbb{C}^\times$ の時, $\varepsilon(s, \rho, \psi) = \varepsilon(s, \chi, \psi)$,

(2) $i = 1, 2$ に対して, V_i を $\mathbb{C}$ 上の有限次元部分空間として, $\rho_i : W_F \to \mathrm{GL}(V_i)$ を連続準同型とする. この時, $0 \to V_1 \to V \to V_2 \to 0$ が W_F 加群としての完全系列ならば

$$\varepsilon(s, \rho, \psi) = \varepsilon(s, \rho_1, \psi)\varepsilon(s, \rho_2, \psi).$$

(3) K/F を有限次分離的拡大として, $i=1,2$ に対して, V_i を $\mathbb{C}$ 上の有限次元部分空間として, $\rho_i : W_K \to \mathrm{GL}(V_i)$ を連続準同型とする. $\dim V_1 = \dim V_2$ ならば,

$$\frac{\varepsilon\left(s, \mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\rho_1, \psi\circ \mathrm{tr}_{K/F}\right)}{\varepsilon\left(s, \mathrm{Ind}_{W_K}^{W_F}\rho_2, \psi\circ \mathrm{tr}_{K/F}\right)} = \frac{\varepsilon\left(s,\rho_1,\psi\right)}{\varepsilon\left(s,\rho_2,\psi\right)}$$

一般の Weil-Deligne 表現 $\rho' = (\rho, N)$ に対する **epsilon 因子** $\varepsilon(s,\rho',\psi)$ は次のように定義される:

$$\varepsilon(s,\rho',\psi) = \varepsilon(s,\rho,\psi)\cdot \det\left(-\rho(\mathrm{Frob}_q)|_{V^{I_F}/(\mathrm{Ker}\,N)^{I_F}}\right).$$

ここで, $V^{I_F}/(\mathrm{Ker}\,N)^{I_F} = \{0\}$ の時は, $\det\left(-\rho(\mathrm{Frob}_q)|_{V^{I_F}/(\mathrm{Ker}\,N)^{I_F}}\right) = 1$ と定める. また gamma 因子 $\gamma(s,\rho',\psi)$ を

$$\gamma(s,\rho',\psi) := \varepsilon(s,\rho',\psi)\cdot\frac{L\left(1-s,(\rho^\vee, N^*)\right)}{L(s,(\rho,N))}$$

と定義する. ここで, $\rho^\vee$ は反傾表現であり, N^* は N から誘導される $\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C})$ の線形写像である.

注意 1.5. epsilon 因子は一般の標数 0 の体上の Weil-Deligne 表現に対しても定義される. 詳しくは [Tat79, (3.6)] の最終段落の (3) を参照.

1.3. **局所 Langlands 対応.** $\mathcal{G}_2(F)$ を $\mathbb{C}$ 上の 2 次元の Frobenius-semisimple([Tat79, (4.1.3)]) な Weil-Deligne 表現の同型類全体とし, $\mathcal{A}_2(F)$ を $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約許容表現の同型類全体とする. ここで, $\mathrm{GL}_2(F)$ の表現 π が許容表現であるとは, 任意の開コンパクト部分群 $K\subset \mathrm{GL}_2(F)$ に対して, π の K 不変部分空間 π^K が有限次 $\mathbb{C}$ 線形空間であり, さらに,

$$\pi = \bigcup_{K:\text{開コンパクト部分群}} \pi^K$$

が成立するものを指す. 既約許容表現 π に対しては標準的に L 関数 $L(s,\pi)$, 及び, **epsilon 因子** $\varepsilon(s,\pi,\psi)$ が定義される ([BH06, 24.2, Theorem 1, Corollary]).

この時, 次の定理が成り立つ

定理 1.6 (GL_2 **の局所 Langlands 対応**)**.** ある標準的な 1 対 1 対応

$$\mathrm{res}_2 : \mathcal{G}_2(F) \longrightarrow \mathcal{A}_2(F)$$

が存在して次が成立する:

$$L(s,\rho') = L\left(s,\mathrm{res}_2(\rho')\right),\ \varepsilon(s,\rho',\psi) = \varepsilon\left(s,\mathrm{res}_2(\rho'),\psi\right).$$

さらに, 次の対応関係が成立する:

$\rho' = (\rho, N)$	$\mathrm{res}_2(\rho')$
$(\chi\|\|\cdot\|\|^{1/2}\oplus\chi\|\|\cdot\|\|^{-1/2}, 0)$	$\chi\circ\det$ (有限次既約表現)
$(\mu\oplus\nu, 0)$	$\pi(\mu,\nu)$ (主系列表現)
$\mathrm{sp}(2)\otimes\chi$	$\mathrm{St}\otimes\chi$ (St: Steinberg 表現)
((既約表現), 0)	超尖点表現

注意 1.7. 局所 Langlands 対応は一般の GL_n においても成立する. すなわち, ある標準的な 1 対 1 対応

$$\mathrm{res}_n : \mathcal{G}_n(F) \longrightarrow \mathcal{A}_n(F)$$

が存在する. ここで, $\mathcal{G}_n(F)$ を $\mathbb{C}$ 上の n 次元の Frobenius-semisimple な Weil-Deligne 表現の同型類全体とし, $\mathcal{A}_n(F)$ を $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約許容表現の同型類全体とする.

2. Asai 表現に付随する L 関数, 及び, epsilon 因子の定義

記号は前章の通りとする. この章では Asai 表現に付随する L 関数, 及び, epsilon 因子について復習する. E/F を 2 次拡大とする.

2.1. **Asai 表現の定義.** $\sigma \in W_F$ を $\mathrm{Gal}(E/F)$ での像が非自明になるものとして 1 つ固定する. $\rho' := (\rho, N)$ を W_E の Weil-Deligne 表現として, $\rho : W_E \to \mathrm{GL}(V)$ とする. この時, W_F の Weil-Deligne 表現 $\mathrm{As}\rho'$ を次のように定義する. まず, $\mathrm{As}\rho : W_F \to \mathrm{GL}(V \otimes V)$ を

$$\mathrm{As}\rho(\tau)(x \otimes y) = \begin{cases} \rho(\tau)x \otimes \rho(\sigma^{-1}\tau\sigma)y & (\tau \in W_E), \\ y \otimes \rho(\sigma^2)x & (\tau = \sigma). \end{cases}$$

$\mathrm{As}\rho$ の同型類は σ の取り方によらないことに注意する. $\mathrm{As}\rho' := (\mathrm{As}\rho, N \otimes 1 + 1 \otimes N)$ によって定義する.

GL_2 の局所 Langlands 対応 (定理 1.6) によって ρ' は $\mathrm{GL}_2(E)$ の既約許容表現 π に対応しているとする. この時, GL_4 の局所 Langlands 対応 (注意 1.7) によって $\mathrm{GL}_4(F)$ の既約許容表現が定まるが, これを, $\mathrm{As}\pi$ と書くことにする. 前章で定義した $\mathrm{As}\rho'$ から定まる L 関数, 及び, epsilon 因子を以下では L_{Gal}, $\varepsilon_{\mathrm{Gal}}$ と書くことにする. すなわち

$$L_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\rho') := L(s, \mathrm{As}\rho'),\ \varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\rho', \psi) := \varepsilon(s, \mathrm{As}\rho', \psi).$$

2.2. **Rankin-Selberg 積分を用いた定義について.** $\varpi_E \in E$ を E の素元として 1 つ固定する. $|\cdot|_E$ を $|\mathrm{N}_{E/F}(\cdot)|_F$ によって定義する. $\mathrm{N}_{E/F}$ は $E^\times$ から $F^\times$ へのノルム写像である. $\xi \in E^\times$ を $\mathrm{tr}_{E/F}(\xi) = 0$ なるものとして 1 つ固定する.

π を $\mathrm{GL}_2(E)$ の無限次元既約許容表現として中心指標を ω とする. $\psi : F \to \mathbb{C}^\times$ を加法的な非自明連続準同型とする. さらに,

$$\psi_\xi : E \longrightarrow \mathbb{C}^\times; \quad x \mapsto \psi(\mathrm{tr}_{E/F}(\xi x))$$

と定義する.

$\mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ を π, 及び, ψ_ξ に付随する Whittaker 模型とする. すなわち, $\mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ は $\mathrm{GL}_2(E)$ 上の連続関数 f であって次の性質を満たすもの全体の集合である: 任意の $u \in E$ と $g \in \mathrm{GL}_2(E)$ に対して

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) = \psi_\xi(u) f(g)$$

が成立し, さらに, ある開コンパクト部分群 $K \subset \mathrm{GL}_2(E)$ が存在して, 任意の $k \in K$ と $g \in \mathrm{GL}_2(E)$ に対して

$$f(gk) = f(g)$$

が成立する.

$\mathfrak{S}(F^2)$ を F^2 上の Bruhat-Schwartz 関数 (局所定数かつ support コンパクトな関数) 全体とする. 任意の $\Phi \in \mathfrak{S}(F^2)$ と $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ に対して $s \in \mathbb{C}$ の関数を次のように定義する (このような形の積分を総称して Rankin-Selberg 積分と呼ぶ):

$$Z(s, W, \Phi) := \int_{U(F)\backslash \mathrm{GL}_2(F)} W(g)\, \Phi((0,1)g)\, |\det(g)|_F^s \, dg. \tag{2.1}$$

ここで $U(F)$ は $\mathrm{GL}_2(F)$ の冪単かつ上三角行列全体であり, dg は $\mathrm{GL}_2(E)$ の不変測度で $\mathrm{vol}(\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F), dg) = 1$ を満たすものとする. $Z(s, W, \Phi)$ は $\mathrm{Re}(s)$ が十分に大きい時にこの積分は絶対収束し複素平面全体に有理型関数として解析接続される. より詳しくは, $Z(s, W, \Phi)$ は $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ の商体の元となる. $Z(s, W, \Phi)$ らによって生成される $\mathbb{C}$ 線型空間は $\mathbb{C}[q^s, q^{-s}]$ の分数イデアルになっており, さらに 1 を含むことが確かめられる. 従って, ある多項式 $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ かつ $P(0) = 1$ なるものが存在して, $P(q^{-s})^{-1}$ がその分数イデアルの生成元となる ([Fl93, Appendix, Theorem]).

まず, Asai 表現に付随する L 関数 (Asai L 関数)$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi)$ をこの生成元によって定義する:

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi) := \frac{1}{P(q^{-s})}.$$

より一般に, 任意の指標 $\chi\colon F^\times \to \mathbb{C}^\times$ に対して

$$L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi) := L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}(\pi \otimes \widetilde{\chi}))$$

と定義する. ここで, $\widetilde{\chi}\colon F^\times \to \mathbb{C}^\times$ は

$$\widetilde{\chi}|_{F^\times} = \chi.$$

を見たす $E^\times$ の指標である. この定義は $\widetilde{\chi}$ の選択に依存しないことに注意する. この $\mathbb{C}$ 上の有理型関数は次の関数等式を満たす ([Fl93, Appendix, Theorem]): 任意の $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ と $\Phi \in \mathfrak{S}(F^2)$ に対して,

$$\frac{Z(1-s, W \otimes \chi^{-1}\omega^{-1}, \widehat{\Phi})}{L_{\mathrm{RS}}(1-s, \mathrm{As}\pi^\vee \otimes \chi^{-1})} = \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) \frac{Z(s, W \otimes \chi, \Phi)}{L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi)}. \tag{2.2}$$

ここで, $\pi^\vee$ は π の双対表現であり, π, ψ, 及び, ξ のみから定まる数 $c \in \mathbb{C}^\times$ と $m \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi \otimes \chi, \psi, \xi) = cq^{-ms},$$

が成り立つ. また

$$\widehat{\Phi}(x, y) := \int_{F \times F} \Phi(u, v)\psi(uy - vx)\, du\, dv$$

と定義する. ここで, $du\, dv$ は $F \times F \to \mathbb{C}; (x, y) \mapsto \psi(x + y)$ に関する自己双対的な不変測度である. すなわち

$$\widehat{\widehat{\Phi}}(x, y) = \Phi(x, y)$$

が成立する. また, 任意の $a \in F^\times$ に対して,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi^a, \xi) &= \omega^2(a)\, |a|_F^{4s-2}\, \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi), \\ \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, a\xi) &= \omega(a)\, |a|_F^{2s-1}\, \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) \end{aligned} \tag{2.3}$$

が成立することに注意する. Rankin-Selberg 積分から定まる gamma 因子を次のように定義する:

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) = \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) \frac{L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi}{L_{\mathrm{RS}}(1-s, \mathrm{As}\pi^\vee)}.$$

注意 2.1. 実は, $E = F \times F$ としても同様の議論が成り立ち, L 関数, 及び, epsilon 因子が定義できる. , $\xi = (\xi_0, -\xi_0)$ として $\pi = \pi_1 \otimes \pi_2$ とする. ここで, π_i は $\mathrm{GL}_2(F)$ の中心指標が ω_i となる generic な既約表現である. この時, この Asai L 関数は Jacquet により定義された [Jac72, Theorem 14.8, (1)] における古典的な Rankin-Selberg 局所 L 関数と一致する. epsilon 因子については $\varepsilon_{\mathrm{RS}}$ と [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものは

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\pi, \psi, \xi) &= \omega_2(-1)\omega(\xi_0)|\xi_0|_F^{2s-1}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi) \\ &= \omega(\xi)|\xi|_E^{s-1/2}\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi) \end{aligned}$$

なる関係にある. ここで右辺の $\varepsilon(s, \pi_1 \times \pi_2, \psi)$ が [Jac72, Theorem 14.8, (3)] において定義されたものである.

2.3. **Asai 表現の L 関数, 及び, epsilon 因子の別の定義について.** 最初に述べたように, Asai 表現の L 関数, 及び, epsilon 因子は複数の異なる定義が存在する. $\mathrm{GL}_2(E)$ の既約許容表現 π から出発する定義は上で紹介した Rankin-Selberg 積分を用いるものの他に Langlands-Shahidi 法 ([Sha90]) と呼ばれる簡約代数群上定義される繋絡作用素を用いた定義がある. すなわち, $\mathrm{U}(2,2)$ に対して Langlands-Shahidi 法を適用することにより, L 関数と epsilon 因子が得られる. これによって定義されたものを

$$L_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\,\pi),$$
$$\varepsilon_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi)$$

とする.

異なる定義間の関係性について述べる. 局所 Langlands 対応により π に対応する Weil-Deligne 表現を ρ' とする. まず, L 関数については, L_{RS}, L_{LS}, そして, L_{Gal} は全て一致することが, [Hen10, Section 1.5, Théorème], [Mat09, Theorem 1.3], 及び, [AR05, Theorem 1.6] の一連の結果によって証明されている. 従って, これらを

$$L(s, \mathrm{As}\,\pi) := L_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\,\pi) = L_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\,\pi) = L_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\,\rho'). \tag{2.4}$$

と書くことにする.

epsilon 因子については, Krishmarthy ([Kri03]) によって, Langlands-Shahidi 法を用いたものと, Weil-Deligne 群の表現から定まるものが一致することが示されている. 従って, 以下では

$$\varepsilon(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi) := \varepsilon_{\mathrm{LS}}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi) = \varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi)$$

とする.

3. 乗法性について

本章では以下の定理を証明する.

定理 3.1. $\mu, \nu : E^\times \to \mathbb{C}^\times$ を指標として. π を $\mathcal{B}(\mu, \nu)$ の既約部分商とする. $c(\psi) = c(\psi_\xi) = 0$ とする時, 次が成立する:

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi, \xi) = \nu(-1)\gamma(s, \mu|_{F^\times}, \psi)\gamma(s, \nu|_{F^\times}, \psi)\gamma(s, \mu\nu^\sigma, \psi_\xi).$$

ここで, $\mathcal{B}(\mu, \nu) := \mathrm{Ind}_{B(E)}^{\mathrm{GL}_2(E)}(\mu \boxtimes \nu)$ である ($\mathcal{B}$ は [Bu97, p.471] で定義されたものと等しい). ここで, $B(E)$ は上三角行列全体とする.

(2.2), 及び, (2.4) により, 示すべきことは, ある $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$, および, $\Phi \in \mathfrak{S}(F^2)$ が存在して, $Z(s, W, \Phi) \neq 0$ かつ

$$Z(1-s, W, \widehat{\Phi}) = \nu(-1)\gamma(s, \mu|_{F^\times}, \psi)\gamma(s, \nu|_{F^\times}, \psi)\gamma(s, \mu\nu^\sigma, \psi_\xi)Z(s, W, \Phi).$$

次の 3 つの場合に分けて示す:

(i) μ, ν の一方が不分岐で他方が分岐している場合,
(ii) μ と ν 両方が分岐している場合,
(iii) μ と ν 両方が不分岐の場合.

まず (iii) の証明について手短に述べる. $W \in \mathscr{W}(\pi, \psi_\xi)$ を Whittaker 関数で $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E)$ の作用で固定されるものとする. また, $\Phi = \mathbb{I}_{\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F} \in \mathfrak{S}(F^2)$ として $\chi = 1$ とする. これらを用いて (2.2) を直接計算することにより所望の等式を得る. 詳しくは読者に任せる.

3.1. **The proof of case (i).**

Proof. μ を分岐, かつ, ν が不分岐であると仮定して良い. ν^{-1} で捻ることにより, さらに, $\nu = 1$ であると仮定して良い.

$$r := \lceil c(\mu)/e_{E/F} \rceil$$

と置く. ここで, $e_{E/F}$ は E/F の分岐指数である. $f \in \mathcal{B}(\mu, 1)$ として以下の等式が成立するものを取る:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) = \mu^{-1}(x)|x|_E^{-1}\mathbb{I}_{|x|_E \geqslant 1}(x).$$

任意の $k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_E)$ $(c \in \varpi_E^{c(\mu)}\mathcal{O}_E)$ に対して $\rho(k)f = f$ であることに注意する ([Sc02, Section 2.1] 参照).

次の 2 つの場合にさらに分けて考察する.

(1) $\mu|_{F^\times}$ が分岐している場合,
(2) $\mu|_{F^\times}$ が不分岐の場合.

Case (1): **$\mu|_{F^\times}$ が分岐している場合**
$c_\mu = c(\mu|_{F^\times})$ とする.

$$\delta := \begin{cases} 0 & (c(\mu)/e_{E/F} \in \mathbb{Z}), \\ 1 & (c(\mu)/e_{E/F} \notin \mathbb{Z}). \end{cases}$$

ここで, E/F が分岐拡大の時, 任意の $E^\times$ の指標 χ であって $\chi|_{F^\times} = 1$ となるものは, $c(\chi)$ が常に偶数になることに注意する. 特に E/F が分岐拡大の時, $\delta = 1$ の場合は $c_\mu = r$ となる.

$$g := |\varpi_F|_F^{-r} \int_{\varpi^{c_\mu}\mathcal{O}_F} \rho\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right) f \, dx.$$

とする. $W_{\psi_\xi, g}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ の明示的な表示を求める. $\theta \in \mathcal{O}_E$ を $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F[\theta]$ となるものとし, 任意の $c, d \in \mathcal{O}_F$ に対して

$$\psi_\xi(c + d\theta) = \psi(d)$$

とする. 計算を進めると, 任意の $a \in F^\times$ に対して次が成立する:

$$
\begin{aligned}
&W_{\psi_\xi, g}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= |a|_F \int_E \sum_{u \in \mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-c_\mu}\mathcal{O}_F} \mu(x^{-1})|x|_F^{-1} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x^{-1} + \varpi_F^{c_\mu} u & 1 \end{pmatrix}\right) \psi_\xi(-ax)\, dx \\
&= |a|_F \int_E \sum_{u \in \mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-c_\mu}\mathcal{O}_F} \mu^{-1}(1 + \varpi_F^{c_\mu} xu)|1 + \varpi_F^{c_\mu} xu|_E^{-1} \mathbb{I}_{E \setminus \varpi_E \mathcal{O}_E}(x^{-1} + \varpi_F^{c_\mu} u)\psi_\xi(-ax)\, dx \\
&= |a|_F \int_{\mathcal{O}_E} \sum_{u \in \mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-c_\mu}\mathcal{O}_F} \mu^{-1}(1 + \varpi_F^{c_\mu} xu)\psi_\xi(-ax)\, dx \\
&= |a|_F \sum_{m=0}^{c_\mu} \int_{\mathcal{O}_E} A_m(x)\psi_\xi(-ax)\, dx \\
&= |a|_F \sum_{m=1}^{r-c_\mu} \int_{\mathcal{O}_F} A_m(x\theta)\psi(-ax)\, dx.
\end{aligned}
$$

ここで, $m = 0, \ldots, r - c_\mu$ に対して

$$
A_m(x) := \sum_{u \in \left(\mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-c_\mu-m}\mathcal{O}_F\right)^\times} \mu^{-1}(1 + \varpi_F^{c_\mu+m} xu).
$$

と置く. もし $m < r - c_\mu$ かつ $a \notin \varpi_F^{-m-c_\mu+r}\mathcal{O}_F$ ならば, 次が成立することに注意する:

$$
\int_{\mathcal{O}_E} A_m(x)\psi_\xi(-ax)\, dx = 0.
$$

したがって, もし $\delta = 1$ ならば, 任意の $a \in F^\times$ に対して次が成立する:

$$
W_{\psi_\xi, g}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|_F \mathbb{I}_{\mathcal{O}_F}(a).
$$

$\delta = 0$ を仮定する. $m = r - c_\mu$ の時, 任意の $a \in F^\times$ に対して

$$
\int_{\mathcal{O}_F} A_m(x\theta)\psi(-ax)\, dx = \mathbb{I}_{\mathcal{O}_F}(a)
$$

となる. $0 \leqslant m < r - c_\mu$ の時は, 任意の $v \in \mathcal{O}_F^\times$ に対して, $A_m(xv) = A_m(x)$ であるから

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}_F} A_m(x\theta)\psi(-ax)\, dx \\
&= \int_{\mathcal{O}_F} A_m(x\theta) \frac{|\varpi_F|_F^{r-m-c_\mu}}{1 - |\varpi_F|_F} \sum_{w \in (\mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-m-c_\mu}\mathcal{O}_F)^\times} \psi(-\varpi_F^{m+c_\mu-r} wx)\, dx \cdot \mathbb{I}_{\varpi_F^{m+c_\mu-r}\mathcal{O}_F^\times}(a)
\end{aligned}
$$

となる. 任意の $r - k \geqslant 1$ なる $k \in \mathbb{Z}$ と $x \in \mathcal{O}_F$ に対して

$$
\frac{|\varpi_F|_F^{r-k}}{1 - |\varpi_F|_F} \sum_{w \in (\mathcal{O}_F / \varpi_F^{r-k}\mathcal{O}_F)^\times} \psi(-\varpi_F^{k-r} wx) = \begin{cases} 0 & x \notin \varpi_F^{r-k-1}\mathcal{O}_F, \\ -(|\varpi_F|_F^{-1} - 1)^{-1} & x \in \varpi_F^{r-k-1}\mathcal{O}_F^\times, \\ 1 & x \in \varpi_F^{r-k}\mathcal{O}_F \end{cases}
$$

となる. 故に, 任意の $a \in F^\times$ に対して

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}_F} A_m(x\theta)\psi(-ax)\,dx \\
&= \left[(1-|\varpi_F|_F) - |\varpi_F|_F^{r-m-c_\mu} \sum_{u \in \left(\mathcal{O}_F/\varpi_F^{r-m-c_\mu}\mathcal{O}_F\right)^\times} \mu^{-1}(1+\varpi_F^{r-1}u)\right] \mathbb{I}_{\varpi_F^{m+c_\mu-r}\mathcal{O}_F^\times}(a) \\
&= (1-|\varpi_F|_F + |\varpi_F|_F)\mathbb{I}_{\varpi_F^{m+c_\mu-r}\mathcal{O}_F^\times}(a) \\
&= \mathbb{I}_{\varpi_F^{m+c_\mu-r}\mathcal{O}_F^\times}(a)
\end{aligned}$$

が成り立つ. 従って, 任意の $a \in F^\times$ に対して

$$W_{\psi_\xi,g}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|_F \mathbb{I}_{\varpi_F^{c_\mu - r}\mathcal{O}_F}(a)$$

となる. 従っていずれの場合も, 任意の $a \in F^\times$ に対して次が成立する:

$$W_{\psi_\xi,g}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|_F \mathbb{I}_{\varpi_F^{c_\mu - r}\mathcal{O}_F}(a). \tag{3.1}$$

ここで, 任意の $x \in \mathcal{O}_E$ と $y \in E^\times$ に対して,

$$\rho(w_1)W_{\psi_\xi,f}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right)\omega(y)^{-1} = \varepsilon(1/2,\pi,\psi_\xi)|\varpi_E^{c(\mu)}y|_E^{1/2}\mathbb{I}_{\mathcal{O}_E}(\varpi_E^{c(\mu)}y)$$

であることに注意する. 故に, 任意の $x \in \mathcal{O}_F$ と $y \in F^\times$ に対して

$$\rho(w_1)W_{\psi_\xi,g}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right)\omega(y)^{-1} = |\varpi_F|_F^{2r-\delta}\varepsilon(0,\pi,\psi_\xi)|y|_F\mathbb{I}_{\varpi_F^{-r+\delta}\mathcal{O}_F}(y) \tag{3.2}$$

となる.

(2.2) において, $W = W_{\psi_\xi,f}$, $\Phi(x,y) = \mathbb{I}_{\varpi_F^{c_\mu}\mathcal{O}_F}(x)\cdot\mathbb{I}_{1+\varpi^{c_\mu}\mathcal{O}_F}(y)$, そして, $\chi = 1$ として計算すると

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{O}_F}\int_{F^\times} \rho(w_1)W_{\psi_\xi,f}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}\right)\omega^{-1}(y)|y|_F^{-s}\,d_F^\times y\,d_F x \\
&= \frac{\gamma_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi)}{|\varpi_F|_F^{c_\mu s}\varepsilon(s,\mu|_{F^\times},\psi)\zeta_F(s)}|\varpi_F|_F^r\int_{F^\times} W_{\psi_\xi,g}\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)|y|_F^{s-1}\,d_F^\times y.
\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi) = \varepsilon_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi)\frac{L_{\mathrm{RS}}(1-s,\mathrm{As}\pi^\vee)}{L_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi)}$$

(3.1) 及び (3.2) により, この等式は

$$|\varpi_F|_F^{r(1-s)}\zeta_F(1-s)\varepsilon(s,\mu,\psi_\xi) = |\varpi_F|_F^{r(1-s)}\zeta_F(s)\frac{\gamma_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi)}{\varepsilon(s,\mu|_{F^\times},\psi)}$$

となる. すなわち

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi) = \gamma(s,\mu|_{F^\times},\psi)\gamma(s,1,\psi)\gamma(s,\mu,\psi_\xi).$$

となり, (1) の場合を得る.

Case (2): $\mu|_{F^\times}$ が不分岐の場合
まず, $c(\mu)$ は E/F が分岐拡大の時は常に偶数であることに注意する.

$$\begin{aligned} h &:= \int_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \rho(k) f dk \\ &= \sum_{u \in \mathcal{O}_F/\varpi_F^{r-1}\mathcal{O}_F} \rho\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F u & 1 \end{pmatrix}\right) f + \sum_{u \in \mathcal{O}_F/\varpi_F^{r}\mathcal{O}_F} \rho\left(w_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}\right) f \end{aligned}$$

とする. これは $\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)$ 不変な元である. 以下で $a \in F^\times$ に対して, $W_{\psi_\xi, h}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ を計算する.

$$h_1 := \sum_{u \in \mathcal{O}_F/\varpi_F^{r-1}\mathcal{O}_F} \pi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi_F u & 1 \end{pmatrix}\right) f, \quad h_2 := \sum_{u \in \mathcal{O}_F/\varpi_F^{r}\mathcal{O}_F} \pi\left(w_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}\right) f.$$

と置く. W_{ψ_ξ, h_1} は上で行った $W_{\psi_\xi, g}$ の同様に計算され,

$$W_{\psi_\xi, h_1}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = |a|_F \mathbb{I}_{\varpi_F^{1-r}\mathcal{O}_F}(a)$$

となる. $a \in F^\times$ に対して, $W_{\psi_\xi, h_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ を計算する.

$$\begin{aligned} &W_{\psi_\xi, h_2}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= |a|_F \sum_{u \in \mathcal{O}_F/\varpi_F^{r}\mathcal{O}_F} \int_E \mu^{-1}(x+u)|x+u|_E^{-1} \mathbb{I}_{|x|_E \geqslant 1}(x+u) \psi_\xi(-ax)\, dx \\ &= \mu(a)|a|_F |\varpi_F|_F^{-r} \varepsilon(1, \mu, \psi_\xi) \mathbb{I}_{\varpi_F^{-r}\mathcal{O}_F}(a) \end{aligned}$$

である. 従って, [Del76, Théorèm 3.2] により,

$$\varepsilon(1, \mu, \psi_\xi) = \mu(\varpi_F)^r |\varpi_F|_F^r$$

となる. 故に, 任意の $a \in F^\times$ に対して,

$$W_{\psi_\xi, h}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mu(a)|a|_F \mu(\varpi_F)^r \mathbb{I}_{\varpi_F^{-r}\mathcal{O}_F}(a) + |a|_F \mathbb{I}_{\varpi_F^{1-r}\mathcal{O}_F}(a). \tag{3.3}$$

となる.

$W = W_{\psi_\xi, f}$ として, $\Phi = \mathbb{I}_{\mathcal{O}_F \oplus \mathcal{O}_F}$, $\chi = 1$ とする. これらを用いて (2.2) 計算すると,

$$\begin{aligned} &L(2-2s, \mu^{-1}|_{F^\times}) \int_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \int_{F^\times} W\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) \mu^{-1}(y)|y|_F^{-s} d_F^\times y\, dk \\ &= L(2s, \mu|_{F^\times}) \gamma_{RS}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi, \xi) \int_{\mathrm{GL}_2(\mathcal{O}_F)} \int_{F^\times} W\left(\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} k\right) |y|_F^{s-1}\, d_F^\times y\, dk \end{aligned}$$

となる. 故に, (3.3) によって

$$\mu(\varpi_F)^r |\varpi_F|_F^{r(s-1)} \zeta_F(1-s) L(1-s, \mu^{-1}|_{F^\times}) = |\varpi_F|_F^{-rs} \zeta_F(s) L(s, \mu|_{F^\times}) \gamma(s, \mathrm{Ad}\,\pi, \psi, \xi).$$

を得る. すなわち,

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\,\pi, \psi, \xi) = \mu(\varpi_F)^r |\varpi_F|_F^{r(2s-1)} \gamma(s, \mu|_{F^\times}, \psi) \gamma(s, 1, \psi)$$

となる. [Del76, Théorèm 3.2] によって

$$\varepsilon(s,\mu,\psi_\xi)=\mu(\varpi_F)^r|\varpi_F|_F^{r(2s-1)}$$

となる. これより (2) を得る. □

3.2. **(ii) の証明.**

Proof. $\mu\boxplus\nu=\mathcal{B}(\mu,\nu)$ とする. この時,

$$\mathrm{As}\,(\mu\boxplus\nu)=\mathrm{As}\,(\mu\nu^{-1}\boxplus 1)\otimes\nu|_{F^\times}=\mathrm{As}\,(1\boxplus\mu^{-1}\nu)\otimes\mu|_{F^\times}$$

となることに注意する. 従って, $\mu|_{F^\times}$ または $\nu|_{F^\times}$ が不分岐の時は, (i) または (iii) の場合に帰着する.

$\mu|_{F^\times}$ と $\nu|_{F^\times}$ が共に分岐していると仮定する. $c_\mu=c(\mu|_{F^\times})$, $c_\nu=c(\nu|_{F^\times})$, $c_\omega=c(\omega|_{F^\times})$ と置く.(2.2) において, $\Phi(x,y)=\nu(x)^{-1}\mathbb{I}_{\varpi_F^{-c_\nu}\mathcal{O}_F^\times}(x)\cdot\mathbb{I}_{1+\varpi_F^{\max\{c_\mu,c_\nu,c_\omega\}}\mathcal{O}_F}(y)$ として $\chi=1$ とすると

$$\begin{aligned}(3.4)\quad &\int_{\varpi_F^{-c_\mu}\mathcal{O}_F^\times}\int_{F^\times}W\left(\begin{pmatrix}y&0\\x&1\end{pmatrix}\right)\omega^{-1}(y)|y|_F^{-s}\mu(x)|x|_F^{s-1}\,d_F^\times y\,dx\\&=\frac{\mu(-1)\gamma(s,\mathrm{As}\pi,\psi,\xi)}{\varepsilon(s,\nu|_{F^\times},\psi)\varepsilon(s,\mu|_{F^\times},\psi)}\int_{\varpi_F^{-c_\nu}\mathcal{O}_F^\times}\int_F W\left(\begin{pmatrix}y&0\\x&1\end{pmatrix}\right)|y|_F^{s-1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\,d_F^\times y\,dx.\end{aligned}$$

となる. $m,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して, コンパクト台を持つ関数 $\phi_{m,n}(x,y,z):F\times F^\times\times E\to\mathbb{C}$ を

$$\phi_{m,n}^\nu(x,y,z):=\mathbb{I}_{\varpi_F^{-c_\nu}\mathcal{O}_F^\times}(x)\cdot\mathbb{I}_{|\varpi_F|_F^m\leqslant|y|_F\leqslant|\varpi_F|_F^{-m}}(y)\cdot\mathbb{I}_{|\varpi_E|_E^n\leqslant|z|_E\leqslant|\varpi_E|_E^{-n}}(z)$$

と定義する. 任意の $f\in\mathcal{B}(\mu,\nu)$ と $m,n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ に対して, 次の積分を定義する:

$$\begin{aligned}I_{m,n}(s,\mu,\nu;f):=&\int_F\int_{F^\times}\int_E f\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&z\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&0\\x&1\end{pmatrix}\right)\\&\times\psi_\xi(-z)|y|_F^{s-1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\phi_{m,n}^\nu(x,y,z)\,d_Fx\,d_F^\times y\,d_Ez.\end{aligned}$$

この時,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(s,\mu,\nu;f)\right)\quad\left(\text{resp. }\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(1-s,\nu^{-1},\mu^{-1};f)\right)\right)$$

は (3.4) の右辺 (resp. 左辺) に一致することに注意する．直接計算により

$$\begin{aligned}
&I_{m,n}(s,\mu,\nu;f)\\
&=\int\!\!\int\!\!\int \nu\mu^{-1}(z)|z|_E^{-1} f\left(\begin{pmatrix} y & 0\\ yz^{-1}+x & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\xi(-z)|y|_F^{s-1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\\
&\quad\times \phi^{\nu}_{m,n}(x,y,z)\,d_Fx\,d_F^{\times}y\,d_Ez\\
&\overset{z\rightsquigarrow zy}{=}\int\!\!\int\!\!\int \nu\mu^{-1}(zy)|zy|_E^{-1} f\left(\begin{pmatrix} y & 0\\ z^{-1}+x & 1\end{pmatrix}\right)\psi_\xi(-zy)|y|_F^{s+1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\\
&\quad\times \phi^{\nu}_{m,n}(x,y,zy)\,d_Fx\,d_F^{\times}y\,d_Ez\\
&\overset{y\rightsquigarrow y/(zz^\sigma)}{=}\int\!\!\int\!\!\int \nu\mu^{-1}(y/z^\sigma)|y/z^\sigma|_E^{-1} f\left(\begin{pmatrix} y/(zz^\sigma) & 0\\ z^{-1}+x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad\times \psi_\xi(-y/z^\sigma)|y/zz^\sigma|_F^{s+1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\phi^{\nu}_{m,n}(x,y/(zz^\sigma),y/z^\sigma)\,d_Fx\,d_F^{\times}y\,d_Ez \qquad (3.5)\\
&\overset{z\rightsquigarrow 1/z}{=}\int\!\!\int\!\!\int \nu\mu^{-1}(yz^\sigma)|yz^\sigma|_E^{-1}|z|_E^{-2} f\left(\begin{pmatrix} yzz^\sigma & 0\\ z+x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad\times \psi_\xi(-yz^\sigma)|yzz^\sigma|_F^{s+1}\nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\phi^{\nu}_{m,n}(x,yzz^\sigma,yz^\sigma)\,d_Fx\,d_F^{\times}y\,d_Ez\\
&=\int\!\!\int\!\!\int \nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\cdot\nu(y)|y|_F^{s}\cdot\mu\nu^\sigma(z)|z|_E^{s-1} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ z+x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad\times \psi_\xi(yz)\phi^{\nu}_{m,n}(x,yzz^\sigma,yz^\sigma)\,d_Fx\,d_F^{\times}y\,d_Ez\\
&=\frac{\zeta_F(1)}{\zeta_E(1)}\int\!\!\int\!\!\int \nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\cdot\nu(y)|y|_F^{s-1}\cdot\mu\nu^\sigma(z)|z|_E^{s} f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ z+x & 1\end{pmatrix}\right)\\
&\quad\times \psi_\xi(yz)\phi^{\nu}_{m,n}(x,yzz^\sigma,yz^\sigma)\,d_Fx\,d_Fy\,d_E^{\times}z.
\end{aligned}$$

となる．

f を具体的に決定する．$\theta\in\mathcal{O}_E$ を

$$\mathcal{O}_E=\mathcal{O}_F[\theta],\quad \psi_\xi(a+b\theta)=\psi(b)\ (a,b\in F) \tag{3.6}$$

となる元とする．任意の $x\in E$ に対して，$a_x,b_x\in F$ を $x=a_x+b_x\theta$ によって定める．$\eta\in F^\times$, 及び, $M\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ を

$$|\eta\varpi_F^M|_F<|\eta^2\varpi_F^{c_\omega}|_F<|\varpi_F|_F^{c(\mu\nu^\sigma)/e_{E/F}},\quad |\varpi_F|_F^M\leqslant|\varpi_F|_F^{c_\nu}. \tag{3.7}$$

となるものとしてそれぞれ固定する．$\Phi_{\eta,M}\in\mathfrak{S}(E)$ を E 上の Bruhat-Schwartz 関数で以下が成り立つものとして定義する:

$$\Phi_{\eta,M}(x)=\psi(\eta a_x)\mathbb{I}_{\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F}(a_x)\cdot\mathbb{I}_{\eta+\varpi_F^M\mathcal{O}_F}(b_x).$$

$N=N(\eta,M)\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ を $\Phi_{\eta,M}(z)\neq 0$ となる任意の z に対して,

$$|\varpi_E|_E^N\leqslant|z|_E\leqslant|\varpi_E|_E^{-N}.$$

となるように取る．以上の準備の下, $f\in\mathcal{B}(\mu,\nu)$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\right)=\Phi_{\eta,M}(x).$$

となるものとして定義する．m,n を十分大きく取ると

(3.8)

$$|\varpi_F|_F^{m-N}|\eta|_F\leqslant|\varpi_F|_F^{-c_\nu}\leqslant|\varpi_F|_F^{-m+N}|\eta|_F,\quad |\varpi_E|_E^{n-N}|\eta|_E\leqslant|\varpi_F|_E^{-c_\nu}\leqslant|\varpi_E|_E^{-n+N}|\eta|_E$$

と仮定して良い. この m,n, 及び, 上で定義した f に対して次を得る

$$\begin{aligned}
&I_{m,n}(s,\mu,\nu;f)\\
&=\frac{\zeta_F(1)}{\zeta_E(1)}\int\int\int \nu^{-1}(x)|x|_F^{-s}\psi(\eta x)\cdot\nu(\eta)^{-1}|\eta|_F^{-s}\nu(y)|y|_F^{s-1}\psi(y)\cdot\mu\nu^{\sigma}(z)|z|_E^{s}\psi(\eta a_z)\\
&\qquad\times \mathbb{I}_{\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F}(a_z)\mathbb{I}_{\eta+\varpi_F^{M}\mathcal{O}_F}(b_z)\phi_{m,n}^{\nu}\left(x,\eta^{-1}yzz^{\sigma},\eta^{-1}yz^{\sigma}\right)\,d_Fx\,d_Fy\,d_E^{\times}z\\
&=\frac{\zeta_F(1)}{\zeta_E(1)}|\eta|_F^{-1}\varepsilon(s,\nu|_{F^\times},\psi)\varepsilon(1-s,\nu|_{F^\times}^{-1},\psi)\\
&\qquad\times\int \mu\nu^{\sigma}(z)|z|_E^{s}\psi(\eta a_z)\mathbb{I}_{\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F}(a_z)\mathbb{I}_{\eta+\varpi_F^{M}\mathcal{O}_F}(b_z)\\
&\qquad\times\phi_{m,n}^{\nu}\left(\varpi^{-c_\nu},\eta^{-1}\varpi_F^{-c_\nu}zz^{\sigma},\eta^{-1}\varpi_F^{-c_\nu}z^{\sigma}\right)d_E^{\times}z
\end{aligned}$$

最初の等式は y を yb_z^{-1} へ変換し (3.7) を用いた. 最後の等式は (3.8) とよく知られた以下の公式を用いた: 任意の $k\in\mathbb{Z}$ に対して,

$$\int_{\varpi_F^k\mathcal{O}_F^\times}\nu(y)|y|_F^{s-1}\psi(y)dy=\begin{cases}0 & \text{if } k\neq -c_\nu,\\ \epsilon(1-s,\nu|_{F^\times}^{-1},\psi) & \text{if } k=-c_\nu.\end{cases}$$

故に, 以下の等式が成立する:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(s,\mu,\nu;f)=\nu(-1)|\eta|_F^{-1}\frac{\zeta_F(1)}{\zeta_E(1)}\int_E\Phi_{\eta,M}(z)\mu\nu^{\sigma}(z)|z|_E^{s}\,d_E^{\times}z.$$

同様の議論で

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(1-s,\nu^{-1},\mu^{-1};f)=\mu(-1)|\eta|_F^{-1}\frac{\zeta_F(1)}{\zeta_E(1)}\int_E\Phi_{\eta,M}(z)\nu\mu^{\sigma}(z)^{-1}|z|_E^{1-s}\,d_E^{\times}z$$

が成立する. (3.6) と $\eta\varpi_F^M\in\mathcal{O}_F$ という事実により, $\Phi_{\eta,M}$ の ψ_ξ に関する Fourier 変換は

$$\widehat{\Phi}_{\eta,M}(z)=\Phi_{\eta,M}(z^{\sigma})$$

を満たす. 故に, $\mu\nu^{\sigma}$ に関する関数等式 (1.2) により次を得る:

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(1-s,\nu^{-1},\mu^{-1};f)=\mu\nu(-1)\gamma(s,\mu\nu^{\sigma},\psi_\xi)\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}I_{m,n}(s,\mu,\nu;f).$$

以上から, 証明すべきことは積分

$$\int_{E^\times}\Phi_{\eta,M}(z)\mu\nu^{\sigma}(z)|z|_E^{s}\,d_E^{\times}z$$

が 0 でないことであるが, 直接計算により

$$\begin{aligned}
&\int_{E^\times} \Phi_{\eta,M}(z)\mu\nu^\sigma(z)|z|_E^s\, d_E^\times z \\
&= \zeta_E(1)\int_{\eta+\varpi_F^M\mathcal{O}_F}\int_{\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F} \psi(\eta a)\mu\nu^\sigma(a+b\theta)|a+b\theta|_E^{s-1}\, d_F a\, d_F b \\
&= \zeta_E(1)\mu\nu^\sigma(\eta)|\eta|_F^{2s-1}\int_{\eta+\varpi_F^M\mathcal{O}_F}\int_{\eta^{-1}\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F} \psi(\eta ab)\mu\nu^\sigma(a+\theta)|a+\theta|_E^{s-1}\, d_F a\, d_F b \\
&= \zeta_E(1)|\varpi_F|_F^M\mu\nu^\sigma(\eta)|\eta|_F^{2s-1}\int_{\eta^{-1}\varpi_F^{-M}\mathcal{O}_F} \psi(\eta^2 a)\mu\nu^\sigma(a+\theta)|a+\theta|_E^{s-1}\, d_F a \\
&= \zeta_E(1)|\varpi_F|_F^M\mu\nu^\sigma(\eta)|\eta|_F^{2s-1} \\
&\quad\times\left[\int_{\mathcal{O}_F}\psi(\eta^2 a)\mu\nu^\sigma|\cdot|_E^{s-1}(a+\theta)\, d_F a + \sum_{r=-M-\mathrm{ord}_F(\eta)}^{-1}|\varpi_F|_E^{r(s-1)}\int_{\varpi_F^r\mathcal{O}_F^\times}\psi(\eta^2 a)\mu\nu^\sigma(a+\theta)\, d_F a\right]
\end{aligned}$$

を得る. 一方, (3.7) により, $-M-\mathrm{ord}_F(\eta) \leqslant (-2\mathrm{ord}_F(\eta)-c_\omega) \leqslant -1$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_{\eta^{-2}\varpi_F^{-c_\omega}\mathcal{O}_F^\times}\psi(\eta^2 a)\mu\nu^\sigma(a+\theta)d_F a &= \int_{\eta^{-2}\varpi_F^{-c_\omega}\mathcal{O}_F^\times}\psi(\eta^2 a)\omega(a)\, d_F a \\
&= \omega(\eta)^{-2}|\eta|_F^{-2}\begin{cases}\varepsilon(0,\omega^{-1}|_{F^\times},\psi) & \text{if } c_\omega > 0, \\ \zeta_F(1)^{-1} & \text{if } c_\omega = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

より求める結論を得る. これで証明が完結した. □

4. 比較定理

定理 4.1. E/F を標数 0 の非アルキメデス的局所体の 2 次拡大とする. π を $\mathrm{GL}_2(E)$ の既約許容表現, ρ' を局所 Langlands 対応により対応する Weil-Delgne 表現とする. この時,

$$\varepsilon_{\mathrm{RS}}(s,\mathrm{As}\,\pi,\psi,\xi) = \omega(\xi)|\xi^2|_F^{s-1/2}\lambda_{E/F}(\psi)^{-1}\varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s,\mathrm{As}\,\rho',\psi)$$

ここで, $\lambda_{E/F}(\psi)$ は E/F に関する Langlands 定数である ([BH06, (30.4.1)]).

Proof. 2.3 章で説明したように, Asai 表現に付随する異なる L 関数間の一致は既に証明されているので, epsilon 因子の一致は gamma 因子の一致に帰着される.

まず, π が $\mathcal{B}(\mu,\nu)$ の既約商であるとする. (2.3) により $c(\psi) = c(\psi_\xi) = 0$ と仮定して良い. Asai 表現の性質により ([Pra92, Lemma 7.1 (d)] 参照), 次を得る:

$$\begin{aligned}
\gamma_{\mathrm{Gal}}(s,\,\mathrm{As}\pi,\,\psi) &= \lambda_{E/F}(\psi)\gamma(s,\,\mu|_{F^\times},\,\psi)\gamma(s,\,\nu|_{F^\times},\,\psi)\gamma(s,\,\mu\nu^\sigma,\,\psi\circ\mathrm{tr}_{E/F}) \\
&= \nu(-1)\omega(\xi)^{-1}|\xi^2|_F^{1/2-s}\gamma(s,\,\mu|_{F^\times},\,\psi)\gamma(s,\,\nu|_{F^\times},\,\psi)\gamma(s,\,\mu\nu^\sigma,\,\psi_\xi).
\end{aligned}$$

最後の等式は $|\xi|_E = |\varpi_F|_F^{-c(\omega_{E/F})}$ による ($c(\psi) = c(\psi_\xi) = 0$ としていることに注意せよ). 従って定理 3.1 と合わせて求める結論を得る.

π が超尖点表現であるとする. $\mathbf{E}/\mathbf{F}$ を総実代数体の 2 次拡大体として, アルキメデス付値では不分岐拡大であり, ある $F\setminus$の有限素点 v_0 が存在して, $\mathbf{E}_{v_0} = E$ かつ $\mathbf{F}_{v_0} = F$ と仮定する. 非自明な加法的指標 $\boldsymbol{\psi}$ of $\mathbb{A}_\mathbf{F}/\mathbf{F}$ と $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{E}^\times$ であって $\mathrm{tr}_{\mathbf{E}/\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi}) = 0$ となるものを固定する. [Sha90, Proposition 5.1] により, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_\mathbf{E})$ の既約尖点的保型表現 $\boldsymbol{\pi}$ が存在して

- $\boldsymbol{\pi}_{v_0} = \pi$.
- $\boldsymbol{\pi}_v$ は $v \neq v_0$ なる有限素点で不分岐.

$\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{\pi}$ の中心指標とする．定理 3.1, 及び, [Jac72, Proposition 17.3] により, 任意の F の素点 $v \neq v_0$ に対して

$$\gamma_{\mathrm{RS}}(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}_v, \boldsymbol{\psi}_v, \xi) = \boldsymbol{\omega}_v(\xi)|\xi^2|_{\mathbf{F}_v}^{s-1/2}\lambda_{\mathbf{E}_v/\mathbf{F}_v}(\psi)^{-1}\gamma_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}_v, \boldsymbol{\psi}_v) \tag{4.1}$$

となる．一方, [Kri03, Theorem 6.7] により, 既約許容表現 $\mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi} := \otimes_v \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}_v$ は isobaric な $\mathrm{GL}_4(\mathbb{A}_{\mathbf{F}})$ の保形表現である．$\mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}$ は isobaric なので, L 関数 $L(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}) = \prod_v L(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}_v)$ は全平面に有理型に解析接続され次の関数等式を持つ:

$$L(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}) = \varepsilon_{\mathrm{Gal}}(s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi})L(1-s, \mathrm{As}\,\boldsymbol{\pi}^\vee). \tag{4.2}$$

故に (2.3), (4.1), (4.2), 及び, Rankin-Selberg 積分によって定義された Asai 表現の大域 L 関数の関数等式 ([Kab04, Theorem 5]) により求める結論を得る． □

注意 4.2. 本研究のアルキメデス的な類似, すなわち, 2 次拡大 $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ に関する Asai L 関数, 及び, epsilon 因子を同様の Rankin-Selberg 積分を用いて定義し, その Weil-Deligne 群の表現との関係は Cheng 氏により同様の結果が得られている [CCI18].

References

[AR05] Anandavardhanan, U. K., Rajan, C. S., *Distinguished representations, base change, and reducibility for unitary groups*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. **14**, 841-854.

[Bu97] Bump, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **55**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[BH06] Bushnell, J.; Henniart, Guy *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 335. Springer-Verlag, Berlin, (2006), ISBN: 978-3-540-31486-8.

[CCI18] Chen, S.-Y., Cheng, Y., Ishikawa, I. *An explicit relation of epsilon factors of Asai L-functions of* GL_2 *for Rankin-Selberg integrals and Galois representations*, submitted.

[Del76] Deligne, P., *Les constantes locales de l'équation fonctionnelle de la fonction L d'Artin d'une représentation orthogonale*, Invent. math. 35 (1976), 299-316.

[Fl88] Flicker, Y. Z., *Twisted tensors and Euler products*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), no. 3, 295-313.

[Fl93] Flicker, Y. Z., *On zeroes of the twisted tensor L-function*, Math. Ann. **297** (1993), no. 2, 199-219.

[Hen10] Henniart, G., *Correspondance de Langlands et fonctions L des carrés extérieur et symétrique*, Int. Math. Res. Not. (2010), no. 4, 633-673.

[Ich08] Ichino, A., *Trilinear forms and the central values of triple product L-functions*, Duke Math. J. **145** (2008), no. 2, 281-307.

[Jac72] Jacquet, H., *Automorphic forms on* GL(2). *Part II*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **278**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[JL70] Jacquet, H., Langlands, R., *Automorphic forms on* GL(2). *Part I*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **114**. Springer-Verlag, 1970.

[Kab04] Kable, A. C., *Asai L-functions and Jacquet's conjecture*, Amer. J. Math. **126** (2004), no. 4, 789-820.

[Kri03] Krishnamurthy, M. *The Asai transfer to* GL_4 *via the Langlands-Shahidi method*, Int. Math. Res. Not. (2003), no. 41, 2221-2254.

[Mat09] Matringe, M., *Conjectures about distinction and local Asai L-functions*, Int. Math. Res. Not. (2009), no. 9, 1699-1741.

[Pra92] Prasad, D., *Invariant forms for representations of* GL_2 *over a local field*, Amer. J. Math. 114 (1992), no. 6, 1317-1363.

[Ser79] Serre, J.-P. *Local fields*, Graduate Texts in Mathematics, 67. Springer-Verlag, New York-Berlin (1979), ISBN: 0-387-90424-7.

[Sc02] Schmidt, R., *Some remarks on local newforms for* GL(2), J. Ramanujan Math. Soc. **17** (2002), no. 2, 115-147.

[Sha90] Shahidi, F., *A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups*, Ann. of Math. (2) **132** (1990), no. 2, 273-330.

[Tat79] Tate, J., *Number theoretic background*, Proc. of Symp. in Pure Math. Vol. **33**(1979), part2, 3-26.

E-mail address: isao.ishikawa@riken.jp